Inner Functionについての二,三の話題 (Function Algebra)

数理解析研究所講究録
143巻 1972年 1-14

inner function についての二，三の話題

奈良高専　貴志 一男

§1. 序

Fisher (1) は disk algebra A の単位球は finite Blaschke product (= A の inner function) の凸閉包である事を示し，更に inner function (またはその商) による近似についていろいろ研究している (2)，(3)。Rudin (4) は Fisher (1) の結果を generalized analytic function に拡張した。§2 ではこれらの事柄について述べる。

§3 では abstract Hardy space $H^\infty(dm)$ の inner function の商によって $L^\infty(dm)$ の関数を近似する事について Douglas-Rudin (5) の結果をと述べる。

§4 では inner function を使って，$H^\infty(dm)$ の complex homomorphism m を含む Gleason part $\mathcal{P}$ ($\neq \{m\}$) の特徴づけ，part metric のある性質，$\mathcal{P}$ の (Gelfand topology による) 閉包 $\mathcal{P}^-$ の性質，ideal $I = \{f \in H^\infty(dm)\ f|\mathcal{P} \equiv 0\}$ に

関係した二，三の性質を調べることにする．

§2. finite Blaschke product の凸閉包

複素平面における閉単位円板を $\bar{D}$，単位円周を T とする．A を disk algebra，すなわち A は $\bar{D}$ 上で連続で D で解析的な関数全体を T に制限した function algebra である．

$$A = \left\{ f \in C(T) \; ; \; \hat{f}(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} f(e^{i\theta})\, d\theta = 0, \; n = -1, -2, \cdots \right\}$$

ともなる。$A \ni \Phi$；$|\Phi| = 1$ ならば Φ を A の inner function という．A の inner function は finite Blaschke product で

$$\Phi(z) = \lambda \prod_{i=1}^{N} \frac{z - \alpha_i}{1 - \bar{\alpha}_i z}, \quad |\lambda| = 1, \quad \alpha_i \in D$$

なる形の式である，

定理（Fisher(1)）．disk algebra A の単位球 $\{f \in A \, ; \, \|f\| \leq 1\}$ は A の inner function 全体の（supremum norm の位相での）凸閉包と一致する

証明　$\forall f \in \{f \in A \, ; \, \|f\| \leq 1\}$ に対して $f_t(z) = f(tz)$，$0 < t \leq 1$，$z \in \bar{D}$ とする，$f \in C(\bar{D})$ より $t \to 1$ のとき $\bar{D}$ で f_t は f に一様収束する．ゆえに，

(i)　$\forall \varepsilon > 0$，$\exists t < 1$，　$\|f - f_t\| < \varepsilon/2$

また，Caratheodory の定理により inner function の列 $\{\Phi_n\}$ が存在して Φ_n は f に(Dで)広義一様収束する．

(2) $\forall \varepsilon > 0$, $\forall t < 1$, $\exists \Phi$ (inner of A) such that $\| f_t - \Phi_t \| < \varepsilon/2$

(1) (2) より

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists t < 1$, $\exists \Phi$ such that $\| f - \Phi_t \| < \varepsilon$.

そこで $\Phi_t = \lambda \prod_{i=1}^{N} \frac{tz - \alpha_i}{1 - \bar{\alpha}_i t z}$ 自身は A の inner function の convex combination である事を示せばよい．

$\alpha = re^{i\theta}$, $0 \le t \le 1$ とすると，

$$\frac{tz - \alpha}{1 - \bar{\alpha} t z} = \frac{t(1-r^2)}{1 - t^2 r^2} \left\{ \frac{z - \alpha t}{1 - \bar{\alpha} t z} \right\} + \frac{r(1-t^2)}{1 - r^2 t^2} (-e^{i\theta}) + \frac{(1-t)(1-r)}{1 - rt} \{0\}$$

$=$ inner function の convex combination

従って，Φ_t は inner function の convex combination である．

Q.E.D

G を compact abelian group，Γ を G の dual group，Σ を Γ における semigroup

$$C_\Sigma = \{ f \in C(G) ; \hat{f}(\gamma) = \int_G f(x) (-x, \gamma) \, dx = 0 \quad \text{for } \gamma \notin \Sigma \}$$

とする．

定理 (W. Rudin (4))．C_Σ の単位球は C_Σ の inner function の全体の凸閉包である．

Fisher (3) は更に次のような事を証明した。

定理．K を単位円 T の compact subset，(disk algebra) A $\ni f$，$\|f\| \leq 1$ とする。

(i) K のある近傍で $|f|=1$ ならば，K 上で f は A のある inner function によって一様近似される。

(ii) K の Lebesgue measure は 0 であるとする。K 上で $|f|=1$ ならば K 上で f は A の inner function によって一様近似される。

定理．A の inner function の商は $\{f \in C(T);\ |f|=1\}$ の中で norm-dense である。

§3．inner function の商による近似

§3 §4 では A を compact Hausdorff space X 上の uniform algebra とし，A の maximal ideal (= complex homomorphism) space $\mathfrak{M}(A)$ の各要素の表現測度は unique であるとする。

$m \in \mathfrak{M}(A)$ の表現測度も m で表わす事にし，A の $L^p(dm)$ closure を $H^p(dm) = H^p$ ($p=\infty$ のときは weak-star closure) と書く。$H^1(dm) \cap L^\infty(dm) = H^\infty(dm)$ である。$H^\infty(dm)$ の Gelfand 表現 $\hat{H}^\infty$ を Šilov boundary $\hat{X} = \mathfrak{M}(L^\infty(dm))$ 上に制限すると logmodular algebra になる。すなわち $L^\infty_R = \log|(H^\infty)^{-1}|$ または $C_R(\hat{X}) = \log|(\hat{H}^\infty)^{-1}|$ となる。

$f \in H^\infty(dm)$, $|f|=1$ a.e.-dm なる関数を $H^\infty(dm)$ の inner function という．$H^\infty(dm)$ の inner function の全体を $\mathcal{U}$ で表わす．

次の事柄は同値である．

1) $m \in X$ $(\subset \mathcal{M}(A))$

2) $H^\infty(dm) = L^\infty(dm)$

3) $m \in \mathcal{M}(L^\infty(dm))$

4) すべての inner function は定数である．

$m \in \mathcal{M}(A) - X$ とすると定数でない inner function が存在する．Douglas - Rudin (5) によって次のような結果が得られている．(Douglas - Rudin はもう少し一般の場合に証明している)

1) $G = \{f/g ; f, g \in \mathcal{U}\}$ は $L^\infty(dm)$ の絶対値が 1 のすべての関数の中で norm-dense である．

2) $Q = \{f/g ; f \in \operatorname{span}\mathcal{U}, g \in \mathcal{U}\}$ は $L^\infty(dm)$ の中で norm-dense である．すなわち inner function によって生成される self-adjoint な algebra は $L^\infty(dm)$ の中で norm-dense

である．

3) ∂H^∞ (H^∞ の Šilov boundary) $= \mathcal{M}(L^\infty(dm))$

$= \{\varphi \in \mathcal{M}(H^\infty),\ |\varphi(f)| = 1 \text{ for all } f \in \mathcal{U}\}$

4) $\mathcal{U}$ は ∂H^∞ を分離する．

これらの結果を classical Hardy space に応用して，

$f \in L^\infty(d\theta)$, $|f| = 1$, $0 < {}^\forall\varepsilon < 1$ とするとき

1°) $\|f - B_1/B_2\| < \varepsilon$ となる Blaschke product B_1, B_2 が存在する．

2°) $\|f - g_1/g_2\| < \varepsilon$ となる $H^\infty(d\theta)$ の inner function g_1 と singular function g_2 が存在する．

3°) $\varphi \in \mathcal{M}(H^\infty(d\theta))$ とする

$\varphi \in \mathcal{M}(L^\infty(d\theta)) \Leftrightarrow |\varphi(f)| = 1$ for all singular function f.

$d\theta$ は単位円周上の Haar measure である．

Fisher (3) は §2 の Rudin の定理から次の結果を導いた．

A を compact Hausdorff space X 上の uniform algebra とする．A に属する inner function は X の点を分離するとき，A の inner function の閉凸包は $C(X)$ の単位閉球である．

これから

5) $\{f/g\ ;\ f, g \in \mathcal{U}\}$ の弱閉包は $\{f \in L^\infty;\ \|f\| \leq 1\}$ である。

§4. Gleason part と inner function

$\mathcal{M}(A) \ni m, \varphi$ について

$\mathfrak{T}(m, \varphi) = \sup\{|m(f) - \varphi(f)|\ ;\ f \in A,\ \|f\| \leq 1\}$

$\sigma(m, \varphi) = \sup\{|\varphi(f)|\ ;\ f \in A,\ m(f) = 0,\ \|f\| \leq 1\}$

と定義する。

$\mathfrak{T}(m, \varphi) < 2 \iff \sigma(m, \varphi) < 1$

である。$\mathfrak{T}(\varphi_1, \varphi_2) < 2 \iff \varphi_1 \sim \varphi_2$ で $\sim$ を定義すると、$\sim$ は同値関係を満足する。$P(m) = \{\varphi \in \mathcal{M}(A)\ ;\ \varphi \sim m\}$ を m を含む $\mathcal{M}(A)$ の Gleason part という。$m \in \mathcal{M}(H^\infty(dm))$ を含む $\mathcal{M}(H^\infty(dm))$ の Gleason part を $\mathcal{P}(m)$ で表わす。

Wermer の定理。$P(m) \supsetneqq \{m\}$ とするとある inner function Z (Wermer の embedding function という) が存在して

1) $ZH^2(dm) = H_m^2$, $H_m^2 = \{f \in H^2(dm)\ ;\ \int f\,dm = 0\}$

2) $\hat{Z}$ は $P(m)$ (または $\mathcal{P}(m)$) から D 上への一対一写像で、その逆写像 $\hat{Z}^{-1} = \tau$ は連続である。

3) $f \in H^\infty$ のとき、$\varphi \in P(m)$ (または $\mathcal{P}(m)$) に対して

$\varphi(f) = \hat{f}(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n$, $\lambda = \hat{Z}(\varphi)$, $a_n = \int \bar{Z}^n f\,dm$.

注) $\wp(m)$ と D とは homeomorphic である.

(I) $P(m) \supsetneqq \{m\} \iff \wp(m) \supsetneqq \{m\}$.

(II) inner function による $\wp(m)\ (\supsetneqq \{m\})$ の特徴づけ

$P(m) \supsetneqq \{m\} \iff ZH^2 = H^2_m$ となる inner function Z が存在する

証明 ($\Leftarrow$) $m \in \mathcal{M}(A) - X$, $P(m) = \{m\}$, $ZH^2 = H^2_m$ とすると, $\wp(m) = \{m\}$ で $ZH^\infty = H^\infty_m$ となる. φ を $\mathcal{M}(H^\infty(dm)) - \{m\}$ の任意の要素とすると, $\sigma(\varphi, m) = 1$.

(*)
$$\begin{aligned}\sigma(\varphi, m) &= \sup\{|\varphi(f)|\ ;\ f \in H^\infty_m,\ \|f\| \leq 1\}\\ &= \sup\{|\varphi(Zg)|\ ;\ g \in H^\infty,\ \|g\| \leq 1\}\\ &= |\varphi(Z)| \sup\{|\varphi(g)|,\ g \in H^\infty\ \|g\| \leq 1\}\\ &= |\varphi(Z)|\end{aligned}$$

$\therefore\ |\hat{Z}(\varphi)| = 1$ for $\forall_\varphi \in \mathcal{M}(H^\infty(dm)) - \{m\}$.

$\hat{Z}(m) = 0$ であるから m は $\mathcal{M}(H^\infty(dm))$ の open-closed point である. $\therefore\ m \in \mathcal{M}(L^\infty(dm))$ (Šilov idempotent theorem) $\therefore\ m \in X$, 矛盾 $m \in X$ ならば明らかに $ZH^2 = H^2_m$ となる inner function は存在しない Q.E.D.

$\wp(m) \supsetneqq \{m\}$ とする. (*)式から

$$\varphi \in \wp \iff \sigma(m, \varphi) < 1 \iff |\varphi(Z)| < 1$$

$$\therefore \wp = \{\varphi ;\ \varphi \in \mathcal{M}(H^\infty),\ |\varphi(Z)| < 1\}$$

更に

$$\wp = \{\varphi ;\ \varphi \in \mathcal{M}(H^\infty),\ |\varphi(h)| < 1 \text{ for all } h \in \mathcal{U} - \{1\}\}$$

$$= \{\varphi ;\ \varphi \in \mathcal{M}(H^\infty),\ |\varphi(h)| < 1 \text{ for all } h \in \mathcal{U} \text{ such that } m(h) = 0\}.$$

となる．

III) part metric について

A_0 を disk algebra とすると，$\lambda_0, \lambda \in D$ に対して schwarz の不等式から

$$\sup\{|f(\lambda)| ;\ f(\lambda_0) = 0,\ \|f\| \le 1,\ f \in A_0\} = \left|\frac{\lambda - \lambda_0}{1 - \bar{\lambda}_0 \lambda}\right| = \sigma(\lambda_0, \lambda)$$

$\wp(m) \supsetneqq \{m\}$ のとき Wermer の定理から $\wp = \{\tau(\lambda) ;\ \lambda \in D\}$.

(*)式から

$$\sigma(\tau(\lambda), \tau(0)) = |\tau(\lambda)(Z)| = |\lambda| = \sigma(\lambda, 0)$$

$$\therefore \sigma(\tau(\lambda), \tau(0)) = \sigma(\lambda, 0)$$

この関係式は

$$\frac{Z - \lambda}{1 - \bar{\lambda} Z} H^\infty = H^\infty_\varphi \quad (\varphi = \tau(\lambda) \in \wp)$$

$$= \{f \in H^\infty(dm) ;\ \varphi(f) = 0\}$$

を使って

$$\sigma(\tau(\lambda_0), \tau(\lambda)) = \sigma(\lambda_0, \lambda) = \left|\frac{\lambda - \lambda_0}{1 - \bar{\lambda}_0 \lambda}\right|$$

と一般化出来る。

更に $\mathfrak{P}(m)$ に属する $\tau(\lambda)$ を $\widetilde{\tau(\lambda)}$ と書き、$P(m)$ に属する $\tau(\lambda)$ はそのままの記号 $\tau(\lambda)$ と書くとき、

$$\sigma(\varphi,\theta) = \sup\{|\theta(f)| \; ; \; f \in A_\varphi, \int |f|^2 d\theta < 1\}$$

(A. Browder. Introduction to function algebras. p. 174)

を使って

$$\sigma(\tau(\lambda_0), \tau(\lambda)) = \sigma(\widetilde{\tau(\lambda_0)}, \widetilde{\tau(\lambda)}) = \sigma(\lambda_0, \lambda) .$$

また H. König の等式

$$\log \frac{1+\sigma(\varphi,\theta)}{1-\sigma(\varphi,\theta)} = 2 \log \frac{2+\sigma(\varphi,\theta)}{2-\sigma(\varphi,\theta)}$$

を使って

$$G(\tau(\lambda_0), \tau(\lambda)) = G(\widetilde{\tau(\lambda_0)}, \widetilde{\tau(\lambda)}) = G(\lambda_0, \lambda)$$

とする。

IV) $\mathfrak{H}$ について。

Wermer embedding function Z についての多項式の weak-star topology $(= \sigma(L^\infty, L^1))$ による閉包を $\mathcal{H}^\infty(m)$、Z と $\bar{Z}$ についての多項式の weak-star topology による閉包を $\mathcal{L}^\infty(m)$ とする。このとき次の関係式が成り立つ (8).

$H^\infty = \mathcal{H}^\infty \oplus I^\infty$, $\quad I^\infty = \{f \in H^\infty ; \int Z^n f \, dm = 0, \; n = 0, 1, 2, \cdots\}$

$L^\infty = \mathcal{L}^\infty \oplus N^\infty$, $\quad N^\infty = \{f \in L^\infty ; \int Z^n f \, dm = 0, \; n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$

($\oplus$ は algebraic direct sum を表わす)

次の事柄は同値である.

1) $f \in I^\infty$

2) $\bar{z}^n f \in I^\infty$ ($n = 0, 1, 2, \dots$)

3) $\hat{f}(\varphi) = 0$ on $\mathcal{S}$

$h(I^\infty) = \text{hull of } I^\infty = \{\varphi \in \mathcal{M}(H^\infty)\,;\ \varphi(h) = 0 \text{ for all } h \in I^\infty\}$

とおくと, 3) から $\mathcal{S} \subseteq h(I^\infty)$, 更に

$$\mathcal{S} = h(I^\infty) = \mathcal{M}(\mathcal{H}^\infty) = \mathcal{M}(H^\infty/I^\infty)$$

が成り立つ. (証明)

$\mathcal{H}^\infty$ と $\bar{z}$ とによって生成される algebra を $L^\infty(dm)$ の norm で閉じた $L^\infty(dm)$ の subalgebra を $\mathcal{H}^\infty(\bar{z})$ で表わすと, $\mathcal{S}$ の topological boundary $\partial\mathcal{S}$ は

$$\partial\mathcal{S} = \mathcal{M}(\mathcal{H}^\infty(\bar{z})) \qquad (\text{cf. } (6))$$

となる. また $\mathcal{H}^\infty$ の Šilov boundary $\partial\mathcal{H}^\infty$ は

$$\partial\mathcal{H}^\infty = \mathcal{M}(\mathcal{L}^\infty) = \{\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{H}^\infty)\,;\ |\varphi(h)| = 1 \text{ for all } h \in \mathcal{U} \cap \mathcal{H}^\infty\}$$

となる. また $\mathcal{L}^\infty$ の関数の実数部分からなる集合を $\mathcal{L}_R^\infty$ とすると

$$\mathcal{L}_R^\infty = \log|(\mathcal{H}^\infty)^{-1}|$$

となり $\mathcal{H}^\infty$ を $M(\mathcal{L}^\infty)$ に制限したものは logmodular algebra になる。

次に $M(H^\infty) - h(I^\infty)$ ($h(I^\infty) = \mathfrak{J}$) について調べてみる。
$M(I^\infty)$ (= I^∞ の maximal ideal space) $\ni {}^\forall\varphi$ に対して $\varphi(h) = 1$ となる $h \in I^\infty$ が存在する。

$$\psi(f) = \varphi(fh) \quad , \; f \in H^\infty(dm)$$

とおくと $\psi \in M(H^\infty) - h(I^\infty)$ で対応

$$\psi \longrightarrow \psi|I^\infty = \varphi$$

で $M(H^\infty) - h(I^\infty)$ と $M(I^\infty)$ とは homeomorphic になる。
(cf. Gamelin ; Uniform algebra , p.12)
　更に $\mathcal{L}^\infty \cdot I^\infty = I^\infty$ なる事を使って $\psi|\mathcal{H}^\infty \in M(\mathcal{L}^\infty)$ となることが解る

$$\because \; |\psi(h)| = 1 \quad \text{for} \quad {}^\forall h \in \mathcal{U} \cap \mathcal{H}^\infty.$$

$\psi(h) = \alpha$ とおくと

$$\int_{\hat{X}} |h - \alpha|^2 d\psi = 0 \quad (d\psi \text{ は } \psi \text{ の表現測度})$$

で $h \in C(\hat{X})$ であるから

$$h = \alpha \quad \text{on} \quad \operatorname{supp}\psi$$

§3 の Douglas - Rudin の結果から ${}^\forall\varepsilon > 0$ ${}^\forall f \in \mathcal{L}^\infty$ に対して

$\exists h_1 \in sp(\mathcal{U} \cap \mathcal{H}^\infty)$, $\exists h_2 \in \mathcal{U} \cap \mathcal{H}^\infty$ して

$$\| f - h_1/h_2 \| < \varepsilon/2 .$$

(こゝで, $Z \to e^{i\theta}$ の対応によって $\mathcal{H}^\infty$ と classical Hardy space $H^\infty(d\theta)$, $\mathcal{L}^\infty$ と $L^\infty(d\theta)$ とは isometrically isomorphic である事を使う. (8))

$$\therefore \int_{\hat{X}} |f - \phi(f)|\, d\phi \leq \int_{\hat{X}} \left|f - \frac{h_1}{h_2}\right| d\phi + \int_{\hat{X}} \left|\frac{h_1}{h_2} - \phi(f)\right| d\phi < \varepsilon$$

$f \in C(\hat{X})$ であるから

$$f = \phi(f) \quad \text{on} \quad \operatorname{supp} \phi$$

従って, $\phi \in M(H^\infty) - h(I^\infty)$ の $\operatorname{supp} \phi \ (\subset \hat{X})$ 上では任意の $f \in \mathcal{L}^\infty$ に対して

$$f = \phi(f) \ (= \text{const.})$$

となる.

参考文献

(1) S. Fisher, The convex hull of the finite Blaschke products, Bull. Amer. Math. Soc., 74 (1968), 1128–1129.

(2) ———, Another theorem on convex combination of unimodular function, Bull. Amer. Math. Soc., 75 (1969), 1037–1039.

(3) ———, Approximation by unimodular functions,

Bull. Amer. Math. Soc., 75 (1969), 795 — 797.

(4) W. Rudin, Convex combinations of unimodular functions, Bull. Amer. Math. Soc., 75 (1969), 795 — 797.

(5) R. G. Douglas & W. Rudin, Approximation by inner functions, Pacif. J. Math., 31 (1969), 313 — 320.

(6) R. G. Douglas, Toeplitz and Wiener Hopf operators in $H^\infty + C$. Bull. Amer. Math. Soc., 74 (1968), 895 — 899.

(7) H. König, On the Gleason and Harnack metric for uniform algebra, Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 22 (1969), 100 — 101.

(8) S. Merrill & N. Lal. Characterization of certain invariant subspaces of H^p and L^p spaces derived from logmodular algebras, Pacif. J. Math., 30 (1969), 463 — 474.

(9) 和田淳蔵，大庭幸雄，Function algebra と Hardy class における extreme point. 数理解析講究録 79 (1969).